

Міністерство освіти і науки України  
Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна  
Кафедра прикладної математики

**“ЗАТВЕРДЖУЮ”**  
Декан факультету  
математики і інформатики

Григорій ЖОЛТКЕВИЧ

“29” серпня 2024 р.



РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

**Прикладні задачі теорії керування**

рівень вищої освіти \_\_\_\_\_ перший (бакалаврський) рівень \_\_\_\_\_

галузь знань 11 – Математика та статистика \_\_\_\_\_

спеціальність 113 – Прикладна математика \_\_\_\_\_

освітня програма «Прикладна математика» \_\_\_\_\_

спеціалізація \_\_\_\_\_

вид дисципліни \_\_\_\_\_ за вибором \_\_\_\_\_

факультет \_\_\_\_\_ математики і інформатики \_\_\_\_\_

2024 / 2025 навчальний рік

Програму рекомендовано до затвердження Вченою радою факультету математики і інформатики

“27” серпня 2024 року, протокол № 8

РОЗРОБНИКИ ПРОГРАМИ: **Ревіна Тетяна Володимирівна**, канд. фіз.-мат. наук, доцент закладу вищої освіти кафедри прикладної математики.

Програму схвалено на засіданні кафедри прикладної математики  
Протокол від “26” серпня 2024 року № 8

Завідувач кафедри прикладної математики



Валерій КОРОБОВ

Програму погоджено з гарантом  
освітньо-професійної програми «Прикладна математика»

Гарант освітньо-професійної програми «Прикладна математика»



Сергій ПОСЛАВСЬКИЙ

Програму погоджено науково-методичною комісією  
факультету математики і інформатики

Протокол від “27” серпня 2024 року № 1

Голова науково-методичної комісії факультету математики і інформатики



Євген МЕНЯЙЛОВ

## ВСТУП

Програма навчальної дисципліни “**Прикладні задачі теорії керування**” складена відповідно до освітньо-професійної програми підготовки бакалавра спеціальності 113 Прикладна математика

### 1. Опис навчальної дисципліни

#### 1.1. Мета викладання навчальної дисципліни

Метою викладання навчальної дисципліни “Прикладні задачі теорії керування” є надання майбутнім фахівцям знань для вміння формулювати та досліджувати прикладні задачі теорії керування.

#### 1.2. Основні завдання вивчення дисципліни:

оволодіння майбутніми спеціалістами основними методами розв’язань задач теорії керування та здатність застосовувати ці методи до вирішення прикладних задач.

#### 1.3. Кількість кредитів 4

#### 1.4. Загальна кількість годин 120

1.5. Характеристика навчальної дисципліни	
За вибором	
Денна форма навчання	Заочна (дистанційна) форма навчання
Рік підготовки	
4-й	
Семестр	
7-й	
Лекції	
32 год.	
Практичні, семінарські заняття	
32 год.	
Лабораторні заняття	
Самостійна робота	
56 год.	
Індивідуальні завдання	
	год.

#### 1.6. Заплановані результати навчання

Студенти повинні досягти таких результатів навчання:

**знати :**

- Класифікацію задач теорії керування
- Умови керованості лінійних систем без обмежень на керування
- Алгоритм зведення лінійних керованих систем до канонічної форми
- Формулювання принципу максимуму Понтрягіна
- Формулювання методу динамічного програмування Беллмана для систем з дискретним часом та для систем з неперервним часом
- Основні підходи до розв'язку задачі синтезу
- Чисельні методи розв'язку задач керованості.

**вміти :**

- Розв'язувати різні типи прикладних задач теорії керування
- Знаходити лінеаризацію нелінійної системи
- Зводити лінійні керовані системи до канонічної форми
- Будувати керування для різних типів керованих систем
- Застосовувати принцип максимуму Понтрягіна до розв'язку задач оптимального керування
- Застосовувати методу динамічного програмування Беллмана до розв'язку задач з дискретним часом та з неперервним часом
- Застосовувати різні методи до розв'язку задачі синтезу

**2. Тематичний план навчальної дисципліни.****Тема 1. Керованість лінійних систем без обмежень на керування.**

- Постановка задачі керованості.
- Керованість лінійних неперервних систем без обмежень на керування. Критерій Калмана повної керованості лінійних систем зі сталими матрицями. Критерій повної керованості в термінах спряженої матриці.
- Інтегральна матриця керованості. Критерій повної керованості в термінах інтегральної матриці. Побудова керування.
- Нормальна форма Бруновського лінійної керованої системи (канонічна форма). Зведення лінійної керованої системи з одновимірним керуванням з постійними матрицями до канонічної форми.
- Спостережуваність лінійних систем керування. Зв'язок між спостережуваністю та керованістю систем керування.
- Керованість і спостережуваність дискретних лінійних систем керування.
- Приклади керованих систем: рідина в баці, керований ланцюг RLC, система зчеплених пружин, система трьох з'єднаних баків, популяція бджіл у вулик, маятник, система хижак-жертва, дитячий візочок, хаотична система, керування рухом несиметричного твердого тіла, принцип навігації Цермело, задача посадки на Місяць, оптимальне планування поставок продукції, оптимальне планування інвестицій.

### **Тема 2. Розв'язок задач оптимального керування.**

- Постановка задачі оптимального керування. Приклад: лінійна задача швидкодії.
- Принцип максимуму Понтрягіна для лінійної задачі швидкодії. Кусково-постійне керування (Bang-bang control).
- Найшвидша зупинка візка на рейках (за умови гладкої поверхні).
- Аналітичний розв'язок задачі швидкодії для лінеаризованої коливальної системи. Міркування щодо розв'язку для нелінійної системи.
- Постановки різних задач оптимального керування – задача швидкодії, інтегральний квадратичний критерій, енергетичні критерії якості, задача Лагранжа, задача Майєра, задача Больца.
- Принцип максимуму Понтрягіна для довільного функціонала.
- Теорема Фельдбаума про число перемикань.
- Знаходження розв'язку задачі швидкодії для керованої системи зчеплених пружин та системи трьох з'єднаних баків.
- Розв'язок задачі розвитку популяції бджіл у вулику за допомогою принципу максимуму Понтрягіна.
- Розв'язок принципу навігації Цермело за допомогою принципу максимуму Понтрягіна.
- Розв'язок задачі оптимального планування поставок продукції за допомогою принципу максимуму Понтрягіна.
- Метод динамічного програмування. Принцип оптимальності Беллмана та рівняння Беллмана для систем з дискретним часом. Приклад: задача розподілу ресурсів, відстань до вузла на графіку. Алгоритм Флойда-Уоршела.
- Метод динамічного програмування. Принцип оптимальності Беллмана та рівняння Беллмана для систем з неперервним часом. Рівняння Беллмана для систем в інтегральній та диференціальній формах. Множина досяжності і функція Беллмана. Приклад; оптимальне за швидкістю гасіння кутових швидкостей мікросупутника.
- Лінійні системи з квадратичним функціоналом якості.

### **Тема 3. Методи розв'язку задачі синтезу**

- Постановка задачі допустимого синтезу. Зв'язок з методами Ляпунова і Беллмана.
- Функція керованості як час руху.
- Розв'язок задачі синтезу для канонічної системи.
- Розв'язок задачі синтезу для довільної двовимірної системи з двовимірним керуванням.
- Розв'язок задачі синтезу для нелінійної системи шляхом дослідження лінеаризованої системи. Приклад – коливальна система.
- Рух матеріальної точки під впливом тертя.
- Рух коливальної системи із двох візків, з'єднаних пружиною.

- Розв'язок задачі синтезу для канонічної системи з мішаним критерієм якості.
- Керування рухом несиметричного твердого тіла.
- Розв'язок задачі синтезу для системи хижак-жертва.
- Розв'язок задачі синтезу для системи Рослера.
- Задача приведення лінійного ланцюга мас, з'єднаних пружинами, до рівноваги за допомогою керуючої сили, прикладеної до першої маси

#### Тема 4. Чисельні методи розв'язку задач керованості.

- Прямі чисельні методи, які зводяться до нелінійного програмування. Приклад – перевернутий маятник на візку.
- Непрямі чисельні методи – метод стрілянини, приклад – рух дитячого візочка. Метод послідовних наближень.

### 3. Структура навчальної дисципліни

#### 4.

Назви модулів і тем	Кількість годин					
	Денна форма					
	Усього	у тому числі				
		л	п	лаб	інд	ср
1	2	3	4	5	6	7
Тема 1. Керованість лінійних систем без обмежень на керування.	24	7	5			12
Тема 2. Розв'язок задач оптимального керування.	44	12	12			20
Тема 3. Методи розв'язку задачі синтезу.	32	10	8			14
Тема 4. Чисельні методи розв'язку задач керованості.	12	3	3			6
Підготовка до контрольної роботи	4					4
Контрольна робота	4		4			
<b>Разом за семестр</b>	<b>120</b>	<b>32</b>	<b>32</b>			<b>56</b>
<b>Усього годин</b>	<b>120</b>	<b>32</b>	<b>32</b>			<b>56</b>

### 5. Теми семінарських (практичних, лабораторних) занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
-------	------------	-----------------

1	Розв'язання задач керованості лінійних неперервних систем без обмежень на керування.	2
2	Ознайомлення з нормальною формою Бруновського лінійної керованої системи (канонічною формою).	1
3	Розбір прикладів керованих систем	2
4	Розв'язання задачі найшвидшої зупинки візка на рейках (за умови гладкої поверхні)	2
5	Ознайомлення з аналітичним розв'язком задачі швидкодії для лінеаризованої коливальної системи. Міркування щодо розв'язку для нелінійної системи.	2
6	Знаходження розв'язку задачі швидкодії для керованої системи трьох з'єднаних баків.	2
7	Знаходження розв'язку задачі розвитку популяції бджіл у вулику за допомогою принципу максимума Понтрягіна.	2
8	Знаходження розв'язку принципу навігації Цермело за допомогою принципу максимума Понтрягіна.	2
9	Ознайомлення з методом динамічного програмування та принципом оптимальності Беллмана та рівнянням Белмана для систем з неперервним часом.	2
10	Знаходження функції керованості як часу руху.	2
11	Розв'язок задачі синтезу для нелінійної системи шляхом дослідження лінеаризованої системи. Приклад – коливальна система.	2
12	Розв'язок задачі синтезу для канонічної системи з мішаним критерієм якості.	2
13	Розв'язок задачі синтезу для системи хижак-жертва.	2
14	Ознаомлення з непрямими чисельними методами, наприклад з методом стрілянини, приклад – рух дитячого візочка.	3
15	Написання контрольної роботи	4
	<b>Разом</b>	<b>32</b>

### 6. Завдання для самостійної роботи

№ з/п	Види, зміст самостійної роботи	Кількість годин
1	Інтегральна матриця керованості. Критерій повної керованості в термінах інтегральної матриці. Побудова керування.	2
2	Спостережуваність лінійних систем керування. Зв'язок між спостережуваністю та керованістю систем керування.	2
3	Керованість і спостережуваність дискретних лінійних систем керування.	2
4	Приклади керованих систем:	6
5	Постановки різних задач оптимального керування – задача швидкодії, інтегральний квадратичний критерій, енергетичні критерії якості, задача Лагранжа, задача Майєра, задача Больца.	4
6	Принцип максимуму Понтрягіна для довільного функціонала.	3
7	Розв'язок задачі оптимального планування поставок продукції за допомогою принципу максимуму Понтрягіна.	2
8	Метод динамічного програмування. Принцип оптимальності Беллмана та рівняння Беллмана для систем з дискретним часом. Приклад: задача розподілу ресурсів, відстань до вузла на графіку. Алгоритм Флойда-Уоршела.	4
9	Рівняння Белмана для систем в інтегральній та диференціальній формах. Множина досяжності і функція Белмана. Приклад; оптимальне за швидкодією гасіння кутових швидкостей мікросупутника.	4
10	Лінійні системи з квадратичним функціоналом якості.	3
11	Розв'язок задачі синтезу для канонічної системи.	2
12	Розв'язок задачі синтезу для довільної двовимірної системи з двовимірним керуванням.	2
13	Рух матеріальної точки під впливом тертя.	2
14	Рух коливальної системи із двох візків, з'єднаних пружиною.	2



15	Керування рухом несиметричного твердого тіла.	2
16	Розв'язок задачі синтезу для системи Рослера.	2
17	Задача приведення лінійного ланцюга мас, з'єднаних пружинами, до рівноваги за допомогою керуючої сили, прикладеної до першої маси	2
18	Прямі чисельні методи, які зводяться до нелінійного програмування. Приклад – перевернутий маятник на візку.	3
19	Метод послідовних наближень.	3
20	Підготовка до контрольної роботи	4
	<b>Разом</b>	<b>56</b>

### 6. Індивідуальні завдання

Не передбачені навчальним планом

### 7. Методи навчання

Пояснювально-ілюстративні лекції, репродуктивні і частково-пошукові методи при проведенні практичних занять, пояснення.

### 8. Методи контролю

- Перевірка домашніх робіт
- Перевірка контрольної роботи
- Контроль на практичних заняттях
- Контроль на лекціях
- Проведення іспиту

### 9. Схема нарахування балів

Поточний контроль, самостійна робота, індивідуальні завдання						Іспит	Сума
Тема 1	Тема 2	Тема 3	Тема 4	Контрольна робота, передбачена навчальним планом	Разом		
4	4	4	2	46	60	40	100

Для допуску до складання підсумкового контролю (іспиту) здобувач вищої освіти повинен набрати не менше 10 балів з навчальної дисципліни під час поточного контролю, контрольної роботи.

## Критерії оцінювання

### Нарахування балів:

Поточний контроль – до 14 балів,

Контрольна робота – до 46 балів,

Іспит – до 40 балів.

**Контрольна робота** оцінюється у 46 балів. Робота складається з 3 практичних задач.

Зміст контрольної роботи:

1. Керованість лінійних систем.
  - Для заданої системи перевірити критерії керованості Калмана і в термінах спряженої матриці.
  - Знайти матрицю керованості та керування, яке переводить задану початкову точку у задану кінцеву за заданий час.
  - За допомогою комп'ютера побудувати траєкторію чисельно.
  
2. Знайти розв'язок задачі швидкодії для керованої системи зчеплених пружин
  - За допомогою заміни змінних звести двовимірну нелінійну систему до чотиривимірної лінійної
  - Застосувати принцип максимуму Понтрягіна для знаходження розв'язку задачі швидкодії. Виписати функцію Гамільтона-Понтрягіна, рівняння на спряжені змінні. Розв'язати це рівняння за допомогою комп'ютера. Виписати принцип максимуму.
  - Застосувати теорему Фельдбаума про число перемикачів для цієї задачі. Власні значення матриці знайти за допомогою комп'ютера.
  - Побудувати за допомогою комп'ютера траєкторію яка переводить початкову точку у кінцеву. Взяти керування або +1, або -1, тобто без перемикачів. Початкові умові взяти самостійно. У вас вийде 4 вимірні траєкторії, ви малюєте проекцію цієї 4 вимірної траєкторії на площини  $x_1x_2$  та  $x_3x_4$
  
3. Знайти чисельний розв'язок задачі синтезу для довільної двовимірної системи з двовимірним керуванням за допомогою комп'ютера. Побудувати траєкторію, яка переводить задану початкову точку у задану кінцеву.

Критерії оцінки по першому завданню.

9-12 – завдання розв'язано повністю, можливі невеликі помилки

5-8 – немає чисельного розв'язку, не усі критерії перевірені, але хоча б один доведено до кінця і знайдено керування

0-4 – керування не знайдено, немає чисельного розв'язку, допущено грубі помилки

Критерії оцінки по другому завданню.

15-20 – аналітичний та чисельний розв'язок знайдено, можливі невеликі помилки

7-14 – аналітичний розв’язок знайдено правильно, у чисельному розв’язку є помилки, неправильно застосована теорема Фельдбаума, або неправильно розв’язано рівняння на спряжені змінні.

0-6 – аналітичного розв’язку немає, програма не працює і не знаходить чисельний розв’язок.

Критерії оцінки по третьому завданню.

11-14 – чисельний розв’язок знайдено, можливі невеликі помилки

6-10 – у чисельному розв’язку є помилки, тому траєкторія не задовольняє початковим умовам

0-5 – програма не працює і не знаходить чисельний розв’язок.

**Іспит** передбачає письмову відповідь на два теоретичних питання зі списку, який надається студентам, та розв’язання задачі. Теоретичні питання матеріал, який студенти вивчали протягом семестру на лекціях. Задача може бути на будь-яку з тем, які розглядалися впродовж семестру на практичних заняттях. До кожного теоретичного питання обов’язково наводити доведення, обґрунтування міркувань, пояснювальні приклади. Якщо теоретичний зміст питань не повністю розкритий або робота містить помилки, бал може бути знижений. За задачу бал може бути знижений, якщо відповідь неправильна та/або наявні помилки в її розв’язанні.

### Шкала оцінювання (чотирирівнева)

Сума балів за всі види навчальної діяльності протягом семестру	Оцінка
90 – 100	відмінно
70 – 89	добре
50 – 69	задовільно
1 – 49	незадовільно

### 10. Рекомендована література

1. Зуєв О. Л. Математична теорія керування: нелінійна динаміка та інженерні застосування: За матеріалами наукової доповіді на засіданні Президії НАН України 6 листопада 2019 року // *Visnik Nacionalnoi akademii nauk Ukraini*. – 2020. – №. 1. – С. 29-37.
2. Крак Ю. В. Основи теорії керування та робототехніки: Навчальний посібник для студентів спеціальності "Інформатика". – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2021. – 152с. Електронне видання
3. Коробов В. І., Сморцова Т. І. Керованість і стабілізація. Навчальний посібник. – Х. ХНУ ім. В. Н. Каразіна. -2017, 77 с.

4. Ладієва Л. Р. Оптимальне керування системами. КПІ ім. Ігоря Сікорського. – 2019.
5. Пічкур В. В. Лекції з теорії керування. КНУ ім. Т. Шевченка, 2017.
6. Теорія керування для інформатиків : підручник / Ю. В. Крак, А. В. Шатирко. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2015. – 175 с.

### 11. Допоміжна література

1. Basic course on control theory - <https://www.aut.bme.hu/Pages/ResearchEn/ControlTheory>
2. Bellman R, Kalaba R. Dynamic programming and modern control theory. Vol. 81. New York: Academic Press;1965.
3. Choque-Rivero AE, Efrain Cruz Mullisaca, and Blanca de Jesús Gómez Orozco. "Bounded finite-time stabilization of the Rössler system." 2019 IEEE International Autumn Meeting on Power, Electronics and Computing (ROPEC). IEEE, 2019.
4. Choque-Rivero AE, Rico-Melgoza J, Ornelas-Tellez F. Finite-time stabilization of the prey-predator model, Proc. of the CNCA. 2019:395-400, <http://www.amca.mx/RevistaDigital/cnca2019/files/0152.pdf>
5. Isidory A. Nonlinear control systems: an introduction.– Berlin: Springer-Verlag, 1989.– 479 p.
6. Korobov VI, Revina TV. On robust feedback synthesis for systems with multidimensional control. J. Math. Phys. Anal. Geom. 2017;13(1):35-56, <https://doi.org/10.15407/mag13.01.035>
7. Korobov VI, Revina TV. On perturbation range in the feedback synthesis problem for a chain of integrators system. IMA J. Math. Control and Information. 2021;38(1):396-416, <https://doi.org/10.1093/imamci/dnaa035>
8. Lee EB and Markus L, Foundations of optimal control theory. – John Wiley, New York, 1967. – 576 p.
9. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, E. F. Mishechenko, The Mathematical Theory of Optimal Processes. – John Wiley & Sons, New York-London, 1962.–360 p.

### 12. Посилання на інформаційні ресурси в Інтернеті, відео-лекції, інше методичне забезпечення

Classical Control Theory (Brian Douglas) (набір із 46 відео) - <https://www.youtube.com/playlist?list=PLUMWjy5jgHK1NC52DXXrriwihVrYZKqjk>